FONCTION EXPONENTIELLE

Jean Chanzy

Université de Paris-Sud *

1 Définition de la fonction « exp » :

Définition 1 *Une équation différentielle est une équation définie par une relation fonctionnelle entre une fonction $y(x)$ et un nombre fini de ses dérivées successives, du type $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, où F est une fonction de plusieurs variables (ici $n+1$). L'inconnue est ici une fonction y dérivable n fois. On dit qu'on lui adjoint une condition initiale si on précise pour les fonctions-solutions f de cette équation une ou plusieurs valeurs en un point de f ou de ses dérivées.*

Définition 2 *Il existe une unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, notée « exp », qui soit solution de l'équation différentielle $y' = y$, avec la condition initiale $\exp(0) = 1$. On l'appelle la fonction exponentielle.*

Définition 3 *On appelle « exponentielle » ou « nombre e » le nombre réel $e = \exp(1)$, dont une valeur approchée est $2,71828\dots$. On peut alors noter la fonction exponentielle $\exp(x) = e^x$.*

On peut définir la fonction exp d'une autre manière :

Conséquence de la définition 2 et définition 4 *Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $f(a+b) = f(a)f(b)$, et $f'(0) = 1$. Cette fonction est la fonction exponentielle.*

<u>Démonstration</u> : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, on a $f(x+b) = f(x)f(b)$. Comme f est dérivable, $f'(x+b) = f'(x)f(b)$, et pour $x = 0$, $f'(b) = f'(0)f(b) = f(b)$, $\forall b \in \mathbb{R}$. f est donc solution de l'équation différentielle $y' = y$. D'autre part, si $x = b = 0$, $f(x+b) = f(x)f(b)$ devient $f(0) = f(0)^2$, ce qui donne $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Si $f(0) = 0$, alors $f = 0$, ce qui est le cas trivial à exclure. Si $f(0) = 1$, $f = \exp$, d'après la définition 2.

Réciproquement, la fonction exp vérifie les conditions de l'énoncé. □

Propriétés de la fonction exp **; Relations fonctionnelles :** $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$e^0 = 1 \qquad e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad \frac{1}{e^b} = e^{-b},$$
$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \qquad (e^x)^n = e^{nx}.$$

2 Étude de la fonction exponentielle :

On considère la fonction :

$$\exp : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to]0, +\infty[\\ x \mapsto \exp(x) = e^x \end{array}$$

1. **<u>Ensemble de définition :</u>** La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.
2. **<u>Limites et asymptotes :</u>** Pour la fonction exp on a les limites suivantes, $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

*Université de Paris-Sud,Bâtiment 425;F-91405 Orsay Cedex

On retiendra la règle suivante : à l'infini, la fonction exponentielle l'emporte toujours sur n'importe quelle fonction puissance et impose sa limite.

On a aussi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{e^x - 1}{x} = e^0 = 1$, ce qui découle du calcul du nombre dérivé en 0 de la fonction exp.

On constate également que l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction exp en $-\infty$.

3. **Sens de variation :** On a $\exp'(x) = \exp(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) > 0$, et exp est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

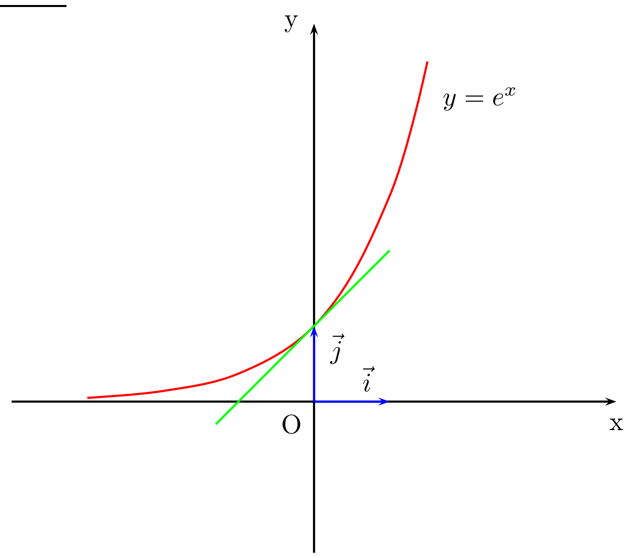
x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	
$\exp(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. **La bijection exp :** Comme la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$, puisque dérivable sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, et on a alors :

$$\begin{array}{llll} e^x = 1 & \Leftrightarrow x = 0 & \forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ e^a = e^b & \Leftrightarrow a = b\ (bijection), \\ e^x > 1 & \Leftrightarrow x > 0 & \forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ e^a > e^b & \Leftrightarrow a > b\ (croissance), \\ e^x < 1 & \Leftrightarrow x < 0 & \forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ e^a < e^b & \Leftrightarrow a < b\ (croissance). \end{array}$$

5. **Tangente particulière :** En $x = 0$, le nombre dérivé de exp est 1, donc l'équation de la tangente à la courbe en $x = 0$ est $y = x + 1$.

6. **Courbe représentative :**



3 Fonction composée $\exp \circ u$:

Proposition 1 *Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction $\exp \circ u = e^u$ est dérivable sur I, et sa dérivée est $(e^u)' = u'e^u$.*

Remarque 1 : Comme $e^u > 0$, le sens de variation de e^u est le même que celui de u. ♣

Exemple 1 *La dérivée de la fonction $f(x) = e^{-kx}$ pour $k > 0$ est $f'(x) = -ke^{-kx}$, et f est toujours décroissante sur $\mathbb{R}$.*

Exemple 2 *La dérivée de la fonction* $g(x) = e^{-kx^2}$ *pour* $k > 0$ *est* $g'(x) = -2kxe^{-kx^2}$*, et* f *est croissante sur* $]-\infty, 0[$*, et décroissante sur* $]0, +\infty[$*. Sa courbe s'appelle une* ***gaussienne****.*

4 Équation différentielle $y' - ky = 0$:

Théorème 1 *L'équation différentielle* $y' - ky = 0$ *a une infinité de solutions* f *de la forme* $f(x) = Ce^{kx}$*, où* C *décrit* $\mathbb{R}$*. À chaque valeur de* C *correspond une solution* f *de cette équation.*

Théorème 2 *Soient* x_0 *et* y_0 *deux réels donnés. L'équation différentielle* $y' - ky = 0$ *a une unique solution* f *telle que* $y_0 = f(x_0)$*. Cette solution s'écrit* $f(x) = y_0e^{k(x-x_0)}$*.*

Démonstration :

1. **Existence :** Elle sera démontrée ultérieurement, après le cours sur les primitives et la fonction ln.
2. **Unicité :** Supposons qu'il existe deux telles fonctions f et g. Comme $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, et $f' = kf$, $g' = kg$, on a $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{(kf)g - f(kg)}{g^2} = 0$, donc $\frac{f}{g} = A$, où A est une constante réelle. Alors $f = Ag$, et $f(x_0) = y_0 = Ag(x_0) = Ay_0$, ce qui entraîne que $A = 1$, et $f = g$.

$\square$

5 Équation différentielle $y' = ay + b$:

Théorème 3 *L'équation différentielle* $y' = ay + b$ *a une infinité de solutions* f *de la forme* $f(x) = -\frac{b}{a} + Ce^{ax}$*, où* C *décrit* $\mathbb{R}$*. À chaque valeur de* C *correspond une solution* f *de cette équation.*

Théorème 4 *Soient* x_0 *et* y_0 *deux réels donnés. L'équation différentielle* $y' = ay + b$ *a une unique solution* f *telle que* $y_0 = f(x_0)$*. Cette solution s'écrit* $f(x) = -\frac{b}{a} + \left(y_0 + \frac{a}{b}\right)e^{a(x-x_0)}$*.*

6 Équation différentielle $y' - ky = h(x)$:

Théorème 5 *La solution générale de l'équation différentielle* $y' - ky = h(x)$*, où* h *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$*, est la somme d'une solution particulière de cette équation, et de la solution générale de l'équation sans second membre* $y' - ky = 0$*. La solution particulière de l'équation* $y' - ky = h(x)$ *peut être trouvée en prenant la solution générale de l'équation* $y' - ky = 0$*, soit* $f(x) = Ce^{kx}$*, et en appliquant la méthode de la variation de la constante* C*, considérée alors comme une fonction de* x *au même titre que* $f(x)$*.*